Chapter 1 Section 3
Approximating explicit functions in the implicit function theorem
陰函数定理における陽函数を近似すること

- 今まで、関数Fの単零点を近似しようとしました。
So far, we have tried to approximate a zero (as a number) of a function.
- 本節には、実数（関数の零点）を近似せず、ある陽関数を局所的に近似するという目的とする。
In this Section, we don’t approximate solutions, but we try to approximate *some explicit* functions itself *locally.*
  - 陽函数：紹介する方法とは、陰函数定理の枠組みに限って、あらゆる関数に対する近似を与えられない。
Some explicit functions: work only in the framework of the implicit function theorem, not for *all* functions.

本節には、実数(関数の零点)を近似せず、ある陽関数を局所的に近似するという目的とする。
In this Section, we don't approximate solutions, but we try to approximate *some explicit* functions itself *locally.*

- 局所的に：点z_0におけるTaylor展開を計算することによって関数を点z_0の近傍に近似できる。
  Locally: Can approximate the function near a point z_0 by computing the Taylor expansion at z_0.
- Taylor展開の階数は高ければ高いほど、近似の制度がいい：
  - 函数の零点の近似：正しい桁の数
  - 函数そのものを近似したら：Taylor展開の階数.
- Taylor展開のことだから、関数は解析 or C^∞-級 (or C^K-級, K>> 0)という仮定は当然だ。
  Since we use Taylor expansions, it is natural to assume that the function is analytic , or C^∞ or C^K for K large.

Case of 1 variable 一変数の場合

- $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$
- Let $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_0, y_0) = c$.
- Assumption: 仮定

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

- By the implicit function theorem, there exists
  陰関数定理により、以下のものが存在する：
  - Open sets $U \ni x_0$, and $V \ni y_0$ (開近傍)
  - $\varphi: U \to V$, C^k-級, such that:

同値

$f(x, y) = c$ and $(x, y) \in U \times V$

is same as と以下の条件と同値である：

$x \in U$ and $y = \phi(x)$

- We can always assume that $c = f(x_0, y_0) = 0$, otherwise we take $g(x, y) = f(x, y) - c$. (since then $g(x_0, y_0) = 0$).
  cは0である想定しても構わない。
- Define a sequence of polynomials in x
  xによる多項式の列を生成する。

$$\phi_0(x) = \varphi(x_0)$$
$$\phi_1(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0)$$
$$\phi_2(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0)\phi'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\varphi''(x_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3\varphi^{(3)}(x_0)$$
$$\phi_3(x) = \varphi(x_0) + \cdots + \frac{1}{7!}(x - x_0)^7\varphi^{(7)}(x_0)$$
$$\vdots$$

- All are Taylor polynomials of order $2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1$ ... of $\varphi(x)$. これらの多項式は$\varphi(x)$の階数$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ ...Taylor多項式である。

陽関数向けのNewton反復
(Newton iteration for explicit functions)

- $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \phi_k(x)\right)^{-1} \cdot f\left(x, \phi_k(x)\right)$
  at order $2^{k+1} - 1$　階数$2^{k+1} - 1$でという意味：
  ☞　表れる単項式$x^{2^{k+1}}, x^{2^{k+1}+1}$ …など、次数2^{k+1}以上の単を無視する。
  ☞ can neglect the terms $x^{2^{k+1}}, x^{2^{k+1}+1}$ …　of degree larger than 2^{k+1}

- Need Taylor expansions of $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \phi_k(x)\right)^{-1}$ and $f\left(x, \phi_k(x)\right)$ at order $2^{k+1} - 1$.
  階$2^{k+1} - 1$-Taylor展開を計算する必要である。
  - $f(x, \phi_k(x))$ に対して☞微分することで。

多項式を反転する？ Z

- $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \phi_k(x)\right)^{-1}$ は多項式でなく $\frac{1}{\text{多項式}}$ である。
  This is not a polynomial, but the inverse a polynomial.
- ベキ級数環上では、可逆で、関数$x \mapsto 1/x$にNewton法を適用することで、そのTaylor展開を計算することができる。
  In the ring of formal power series it is invertible and can be computed by Newton iteration applied to the function $x \mapsto 1/x$.
  例：$\frac{1}{1+2x^2} = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + 16x^8 \ldots$

- ☞ $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \phi_k(x)\right)^{-1}$に対して、多項式を反転することで、$2^{k+1} - 1$階 Taylor展開を求められる。

正確な2乗収束

- $\phi_{k+1}(x) = \phi_k(x) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, \phi_k(x)\right)^{-1} \cdot f\left(x, \phi_k(x)\right)$
- **Theorem**: もし　$\phi_k(x) - \varphi(x)$ のx_0におけるTaylor展開では、最初の零でない単はx^{2^k}であれば、
  If in the Taylor expansion at x0 of …., the first non-zero term is x^{2^k} then
  - $\phi_{k+1}(x) - \varphi(x)$の$x_0$におけるTaylor展解では、最初の零でない単は$x^{2^{k+1}}$である。
    The first non-zero term of the Taylor expansion of …, is $x^{2^{k+1}}$.

- ☞　The precision doubles at each iteration
  ☞　精度は反復ごとに倍になる。

参考までに:ベキ級数上の付値

- $\mathbb{R}$上のベキ級数環：$\mathbb{R}[[X]]$と書く。
  The ring of power series over $\mathbb{R}$ is denoted $\mathbb{R}[[x]]$.
- There is a valuation (付値)

$$ord_x : \mathbb{R}[[x]] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \mapsto \inf\{\, i : a_i \neq 0\}$$

- 例　:$P(x) = x^2 + 3x^3 + x^4$ $ord_x(P) =?$.

1. $ord_x(0) = \infty$ とする。
2. $ord_x(P \cdot Q) = ord_x(P) + ord_x(Q),\ \forall P, Q \in \mathbb{R}[[x]]$
3. $ord_x(P + Q) \geq \max\{ord_x(P), ord_x(Q)\}$

ベキ級数上の超距離 Ultrametric norm

- Corollary (系): The map $|\cdot|_x : \mathbb{R}[[x]] \to [0,1]$
$$P(x) \mapsto 2^{-ord_x(P)}$$
is a (ultrametric) norm on $\mathbb{R}[[x]]$ (上の超ノルムである)
- 証明：付値 $ord_x(.)$ に関する 1. 2. 3. の公式に従う。

☞ Similarly to the Newton method for zeros, we can formulate a precise convergence theorem for this norm
上記のベキ級数上のノルムを使って、零点に対するNewton法と同様に、正確な収束性定理を述べることができる。

$$\left|\phi_{k+1}(x) - Taylor展開\left(\varphi(x)\right)\right|_x \le \left|\phi_k(x) - Taylor展開\left(\varphi(x)\right)\right|_x^2$$

- Exact Quadratic convergence 正確な２乗収束 (Theorem p.7)

多変数への一般化について
About the generalization to several variables

- $F: \Omega \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$
  $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, \dots, y_n \mapsto \left(F_1(x_1, \dots, y_n), \dots, F_n(x_1, \dots, y_n)\right)$
- Assumption 仮定: The Jacobian matrix

$$Jac_{X_0,Y_0}(F_Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(X_0, Y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(X_0, Y_0) & \cdots \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(X_0, Y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(X_0, Y_0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$$

is invertible at the initial value X_0, Y_0.
ヤコビ行列はX_0, Y_0において非特意。

陰関数定理：関数$\Phi: U \ni X_0 \to V \ni Y_0$が存在し、

$F(X, Y) = F(X_0, Y_0)$と$(X, Y) \in U \times V$のときとそのときだけ、$Y = \Phi(X)$と$X \in U$が成り立つ。

多変数への一般化についてII
About the generalization to several variables II

- We can assume $F(X_0, Y_0) = 0$ or let $\tilde{F}(X,Y) = F(X,Y) - F(X_0, Y_0)$ $(F(X_0, Y_0) = 0$ と想定しても構わない)
- $G(X,Y) = F(X + X_0, Y)$
(or we can assume $X_0 = 0$. Or $X_0 = 0$ だと想定しても構わない)
- We can compute as in the case of one variable the following Taylor expansions at order $2^0 - 1,\ 2^1 - 1,\ 2^2 - 1,\ 2^3 - 1, \ldots$ 一変数の場合と同様に適当な階数でTaylor展開を計算する。
  - $\Phi_0(X) = Y_0$
  - $\Phi_1(X) = Y_0 + Jac_{X,\Phi_k(X)}(F) \cdot (X - X_0)$

$$\vdots$$

- By the multivariate Newton formula 手変数ニュートン反復

$$\Phi_{k+1}(X) = \Phi_k(X) - Jac_{X,\Phi_k(X)}(F)^{-1} \cdot F\big(X, \Phi_k(x)\big).$$