数理逍遥II[16C1115] Topics in Mathematics
Fall 2016 (後期)
（数値）計算数理科学入門
Introduction to (numerical) computational mathematics

10月13日　Newton’s Method 2

Xavier DAHAN
Ochanomizu Graduate Leading Promotion Center
Office:理学部2号館503 mail: dahan.xavier@ocha.ac.jp

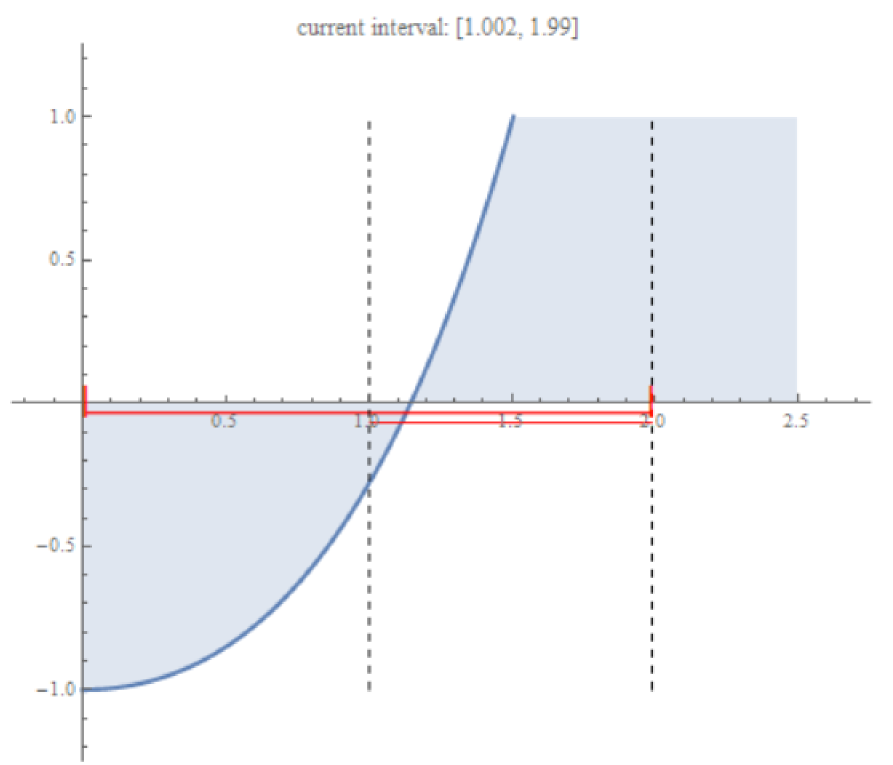
Review of Last Class 先週の復習

- Finding real solutions of function $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  一実変数の実数値関数の零点を求める。

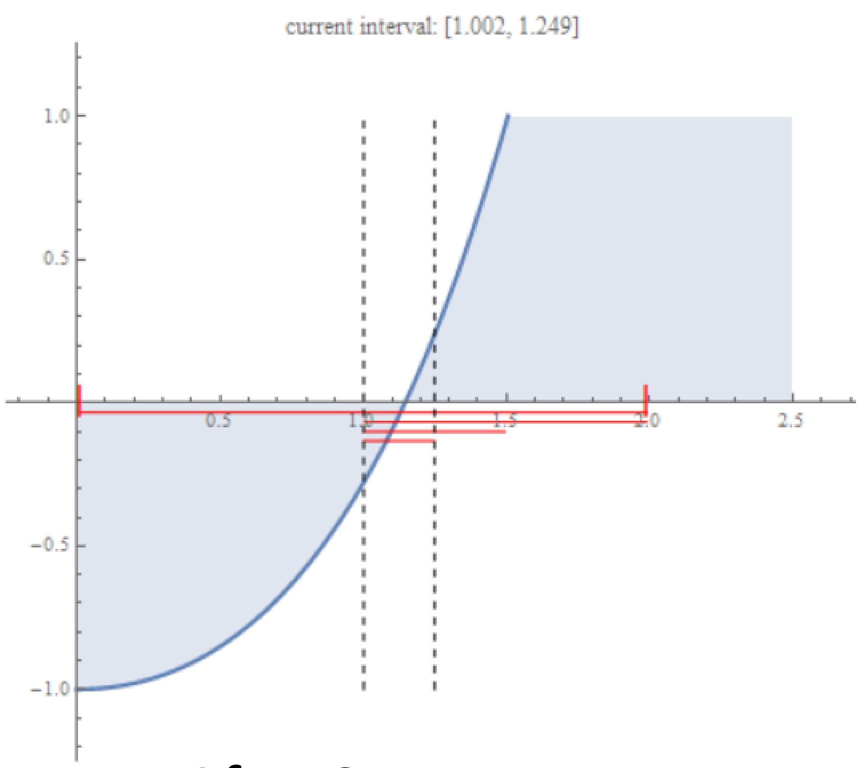
1. Bisection method 二分法
   a. 解を含む区間を計算する方法。
      Mehod that computes intervals containing a solution
   b. Converges to one solution at a rate $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$
      初期値に定まる唯一な解に$O\left(\frac{1}{2^n}\right)$で収束する。
   c. Not Iterative Method. 反復法の一種ではない。

Visualization 可視化

- Example: $f(x) = e^x - 2 - x.$ $[a_0, b_0] = [0,2]$



After 1 steps



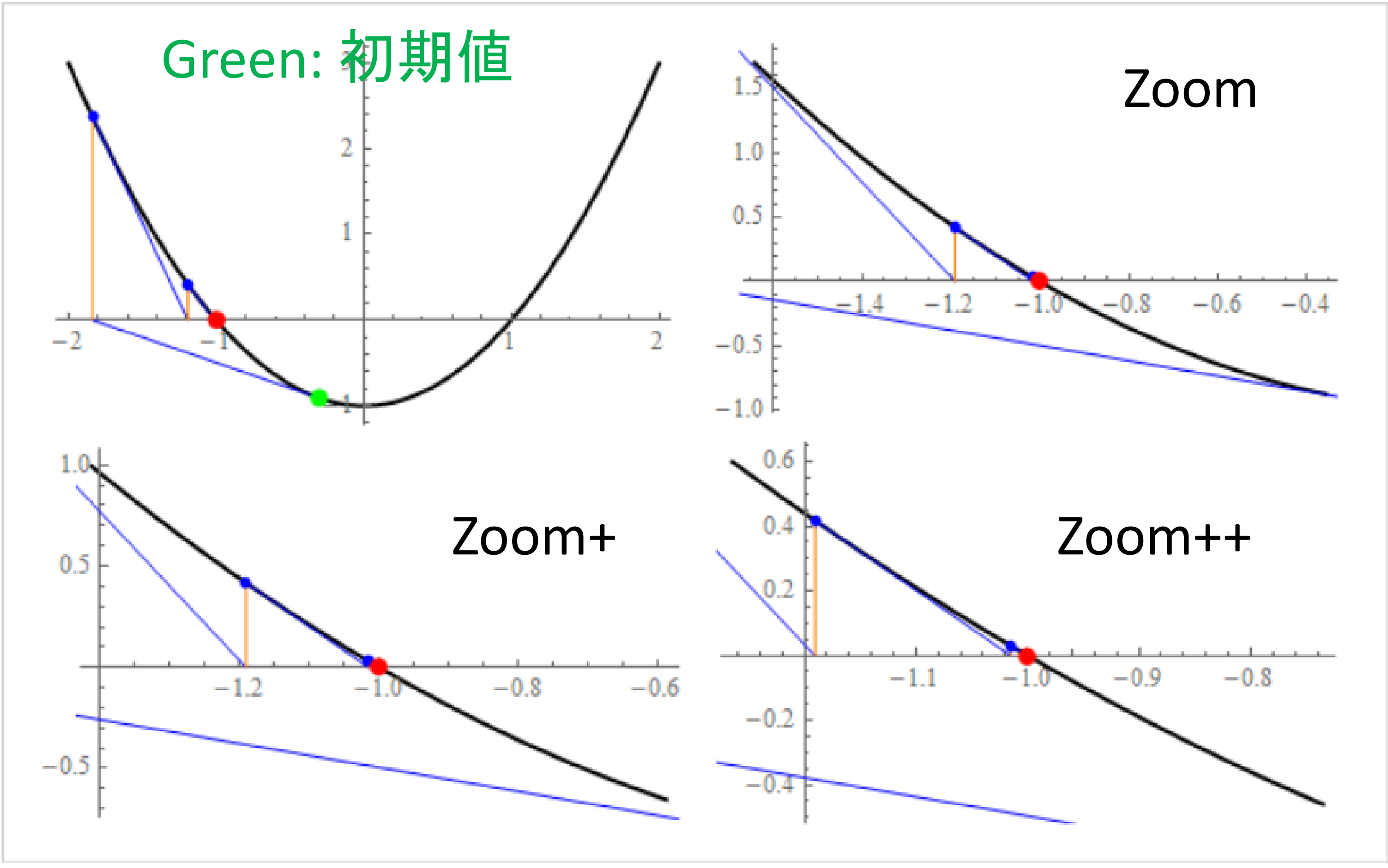
After 3 steps

Review 2: Newton's method

1. Newton's method in one variable
   a. Approximate a simple solution z: $f'(z) \neq 0$
      単根を近似する方法。
   b. Representative of Iterative methods:
      $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
      反復法の一種で、代表的な例。
   c. Convergence is based on the contracting map
      $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad g(z) = z$$
      収束は縮小写像に基づく。
   d. If the initial value is near enough z, then the convergence is quadratic
      初期値は解zに十分近ければ、２乗収束の速さ。

Geometric interpretation 幾何的な解釈

- Example: $f(x) = x^2 - 1$ Initial value: $x_0 = -0.31$



Remarks on Newton's method

- 予め、初期値x_0を求めようとする解zから十分に近いことを確信するのは難しい。
  Difficult to guarantee that the initial value is near enough to the solution.
- We may use the bisection first to isolate an interval small enough.
  ニュートンの前、二分法を用いて解を含む十分に狭い区間を孤立することもできる。
- 各nに対して$f'(x_n)$と$f(x_n)$を計算しなければならないだが、fは多項式、有理関数などでないと難しい：例：$x_n = 1$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x_n) = \sin(1) = ?$
  Problem to evaluate f and f'.
- 後で関数近似を勉強する。

From iteration to an algorithm
反復からアルゴリズムへ

- Input: ◉ 初期値 Initial value x_0, $f'(x_0)$
  ◉ 精度 precision ϵ
  ◉最大の繰り返し回数 maximal number of iterations N_0
- Output: 解zの近似 or Failメッセージ

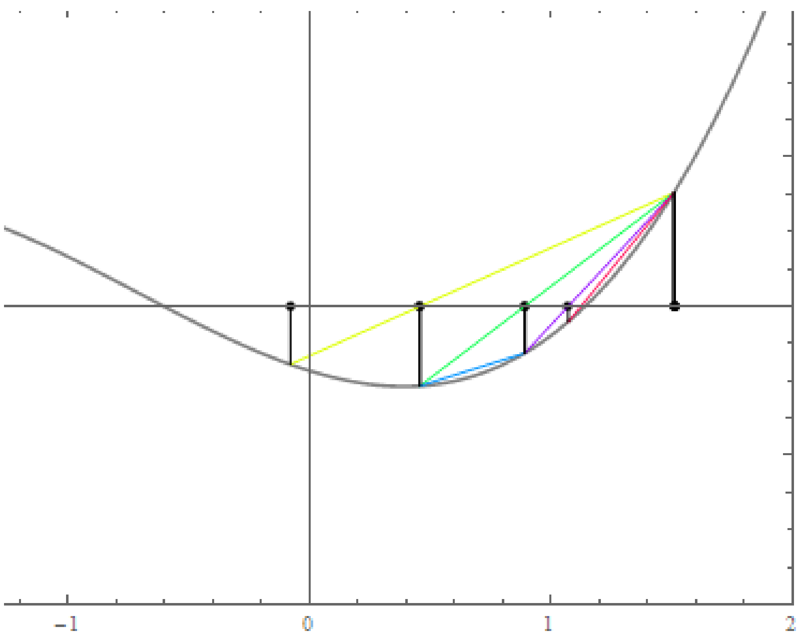
1. i:=1
2. **While** ($i \le N_0$) do
3. $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
4. **if** ($|x_1 - x_0| < \epsilon$) **then** Return x; End
5. **else** $i := i + 1$; $x_0 = x_1$ (Update)
6. End while;
7. Return 「Fail」 (N_0 ϵ-close solution found after N_0 iterations N_0回の繰り返しの後でϵ近似を求めるのにFailした)

Secant Method 割線法

- ニュートンにおいての同じ仮定の下で、以下に反復をする：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- 数値的に微分する：$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$



例：$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - 0.8$

初期値：$x_0 = -0.08$
$x_1 = 1.5$

Modification for the secant method
割線法への変形

- Only needs to change one line in the Algorithm of the Newton method to implement the secant method.
割線法のアルゴリズムを書くのに、ニュートン法のアルゴリズムのラインの一つだけを変更すればよい。
- <u>Input:</u> ◉ 精度 precision ϵ
<u>初期値</u> Initial values $x_0 \neq x_1,\ f'(x_0) \neq 0,\ f'(x_1) \neq 0$
◉最大の繰り返し回数 maximal number of iterations N_0
- <u>Output:</u> 解zの近似値 or Failメッセージ

1. i:=1
2. **While** $(i \leq N_0)$ do
3. $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$
4. **if** $(|x_2 - x_0| < \epsilon)$ **then** Return x_2; 「End」
5. **else** $i := i + 1$; $x_0 = x_1, x_1 = x_2$ (Update)
6. Return 「Fail」

Newton's method at a multiple solution
ニュートン法で重複根の取り扱い (参考までに)

- もしも解zは単根でなければまたは、$|f'(z)|$は小さいと、収束を観測できるが、２乗収束ではない。
  If z is not a simple root or with near zero derivative, then the method may converge but not quadratically.

- 対策方法：もし$f(z)=0, f'(z)=0$、ということはzは重複だったら、
  $$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$
  においては、zは単根である$(\mu(z)=0, \mu'(z)\neq 0)$.

- Apply Newton's method with μ instead of f:
  $$g(x)=x-\mu(x)/\mu'(x)$$

Newton’s method for complex functions （複素数による関数に対するニュートン法）

- $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphic on D (開集合Dに正則)
  - $f(x+iy) = u(x+iy) + i\,v(x+iy)$
    Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
  - $f(z) = 0\,,\ f'(z) \neq 0$

  - もしも、x_0は解zに十分近ければ、以下の反復過程

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

    に作り出される列$(x_0, x_1, \dots)$は以下の条件を満たす：
    - $f(x_n) \neq 0$ for all n.
    - $|x_{n+1} - z| \leq M\,|x_n - z\,|^2,\ \ M = \left|\frac{f''(z)}{2f'(z)}\right|$

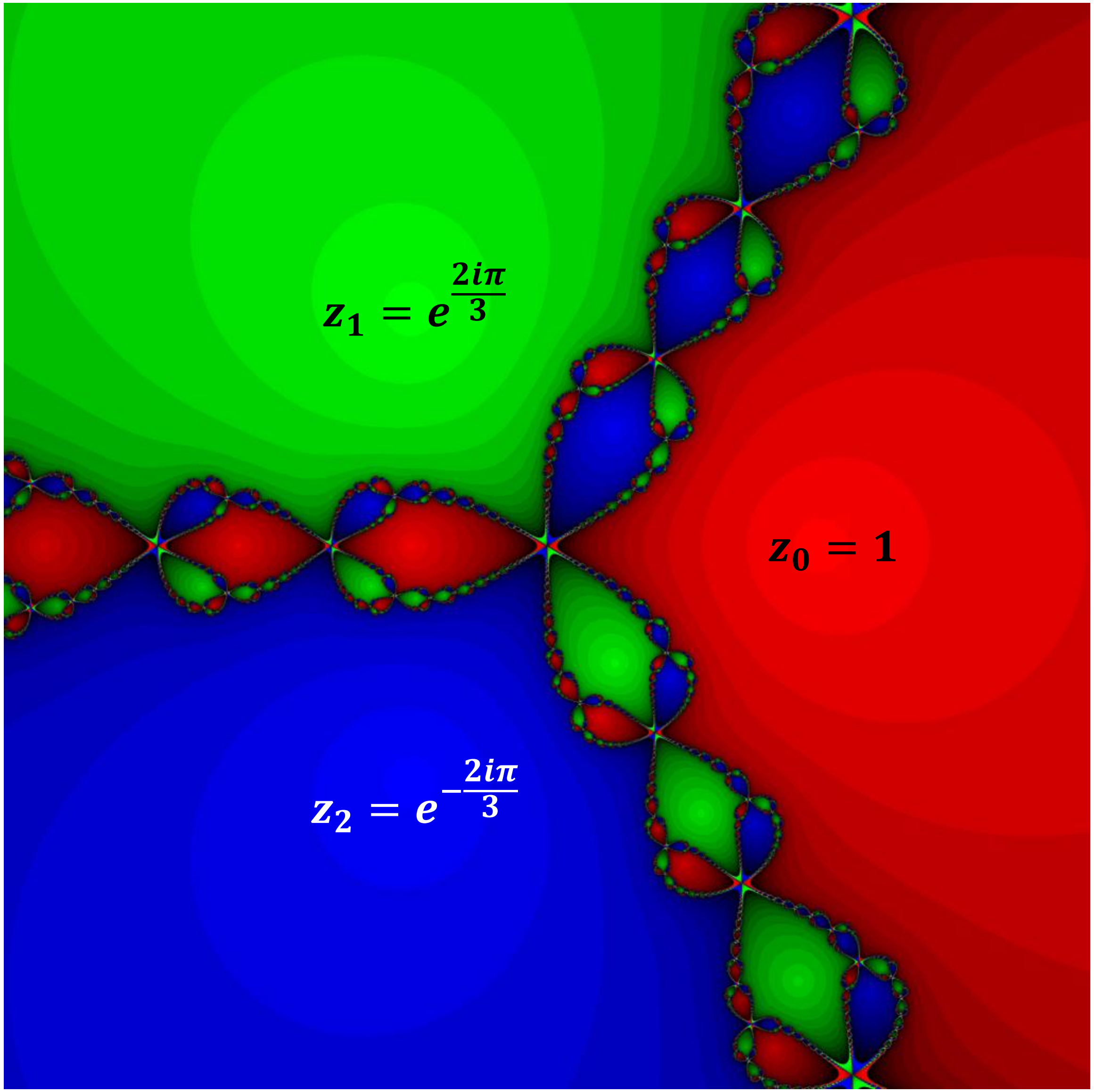
(参考までに) Newton and Fractal

- If $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^3-1$ has 3 roots:
  $$z_0=1,\qquad z_1=e^{\frac{2i\pi}{3}},\qquad z_2=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

- Problem: Given an initial value $x_0\in\mathbb{C}$, what is the root $z(x_0)\in\left\{1,e^{\frac{2i\pi}{3}},e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$ to which the Newton's iterations $(x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots)$ converge ?

  (初期値をx_0とし、ニュートン反復に作り出された列　$(x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots)$は、どの根$z(x_0)\in\left\{1,e^{\frac{2i\pi}{3}},e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$に収束するか.

- 同じ解に収束する初期値を同色を割り当てる。次のフラクタルを与える。



x_0 is red → converge to z_0

x_0 is green→ converge to z_1

x_0 is blue → converge to z_2

Dark color: slow convergence (収束率が遅い)

Light color: fast convergence (収束率が速い)

Since $f'(0) = 0$ (NG for Newton's method) the starting point $x_0 \approx 0$ is NG

Principle of multivariate Newton's method
多変数のニュートン法の原理

- $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Same dimension *n*. 同じ次元.

$$Jac_X(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ Jacobian matrix ヤコビ行列

$$X_{n+1} = X_n - Jac_{X_n}(F)^{-1} \cdot F(X_n) \in \mathbb{R}^n$$

- いくつかの条件の下で、Fの零点Zに2乗収束がある。