数理逍遥 II[16C1115] Topics in Mathematics。
担当：DAHAN Xavier　　2016, December 15th

連立 1 次方程式系、反復法：練習問題の解

Exercise 1

$$(S_A)\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3 &= 5\\ -x_1+3x_2+x_3 &= -4\\ 2x_1+2x_2+5x_3 &= 1\end{cases}$$

1.

$$\begin{array}{lll} & \text{Jacobi:} & \\ x_1^{(k+1)} &=& \frac{1}{4}\left(5-x_2^{(k)}+x_3^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)} &=& \frac{1}{3}\left(-4-x_3^{(k)}+x_1^{(k)}\right)\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{1}{5}\left(1-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}\right)\end{array}\qquad \begin{array}{lll} & \text{Gauss-Seidel:} & \\ x_1^{(k+1)} &=& \frac{1}{4}\left(5-x_2^{(k)}+x_3^{(k)}\right)\\ x_2^{(k+1)} &=& \frac{1}{3}\left(-4-x_3^{(k)}+x_1^{(k+1)}\right)\\ x_3^{(k+1)} &=& \frac{1}{5}\left(1-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}\right)\end{array}$$

2. ゆえに、$\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ を初期ベクトルとすると、

$$\begin{array}{lll} & \text{Jacobi:} & \\ x_1^{(1)} &=& \frac{5}{4}=1.25\\ x_2^{(1)} &=& -\frac{4}{3}\approx -1.3333\\ x_3^{(1)} &=& \frac{1}{5}=0.2\end{array}\quad \begin{array}{lll} & \text{Jacobi:} & \\ x_1^{(2)} &\approx& 1.6667\\ x_2^{(2)} &\approx& -0.9833\\ x_3^{(2)} &\approx& -0.2333\end{array}\quad \begin{array}{lll} & \text{Gauss-Seidel:} & \\ x_1^{(1)} &=& 1.25\\ x_2^{(1)} &=& -\frac{11}{12}\approx 0.9167\\ x_3^{(1)} &=& \frac{1}{15}\approx 0.0667\end{array}\quad \begin{array}{lll} & \text{Gauss-Seidel:} & \\ x_1^{(2)} &\approx& 1.496\\ x_2^{(2)} &\approx& -0.8569\\ x_3^{(2)} &\approx& -0.0556\end{array}$$

参考までに、解は：$\mathbf{x}\approx(1.44776, 0.835821, -0.0447761)^T$。ということは、ここで、Gauss-Seidel のほうが早いです。

3. $A.x=b$ とすると、$A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\-1&3&1\\2&2&5\end{pmatrix}$ と $b=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$、$A=D-L-U$.

$$D=\begin{pmatrix}4&&\\&3&\\&&5\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&&\\1&0&\\-2&-2&0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0&-1&1\\&0&-1\\&&0\end{pmatrix}$$

4. $T_j=D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&&\\&\frac{1}{3}&\\&&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&0\end{pmatrix}$.

$$T_g=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}4&&\\-1&3&\\2&2&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&-1&1\\&0&-1\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&&\\\frac{1}{12}&\frac{1}{3}&\\-\frac{2}{15}&-\frac{2}{15}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\&0&-1\\&&0\end{pmatrix}$$

$$T_g=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}\\0&\frac{2}{15}&0\end{pmatrix}$$

5. $\chi_{T_j}(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\lambda}{20} + \frac{1}{15}$
   根：$\lambda_1 \approx -0.3645$, $\lambda_2 \approx 0.1823 - 0.3869i$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$
   $\rho(T_j) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} < 1$

   $\chi_{T_g}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \frac{\lambda}{12} + \frac{1}{30})$
   根: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{24}(-1+i\sqrt{91/5}) \approx -0.042+0.177i$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = \frac{1}{24}(-1-i\sqrt{91/5}) \approx -0.042 - 0.177i$.

   $\rho(T_g) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} < 1$

6. From Chapter 3, Section 2, Theorem 3, $\rho(T_j) < 1$ と $\rho(T_g) < 1$ だから Jacobi 法も Gauss-Seidel 法も収束する。

Exercise 2 （収束に関する結果の練習）

1. $\rho(T_g) < 1$, and $\rho(T_j) < 1$.
2. いいえ。スペクトラル半径を計算するのは、行列 T_j また T_g の固有値を計算する必要があります。それが簡単ではなく、最初の反復を計算して、収束するかを確認できることもある。
3. 対角優位行列（講義 12 月 1 日に証明された）。また、正定値対称行列 (Report 3-1)
4. はい。連立一次方程式系の (S_A) と (S_B) の行列 A と B は対角優位であるから。

Exercise 3 (Easy)

Exercise 4 *(対象行列の固有値は実数)*

1. $\overline{y}^T Ay \in \mathbb{C}$ だから、1×1 の行列とみなして、$[\overline{y}^T Ay]^T = \overline{y}^T Ay$ を得る。一方、$[\overline{y}^T Ay]^T = y^T A^T (\overline{y}^T)^T = y^T A\overline{y}$.
2. $Ax = \lambda x \Rightarrow \overline{x}^T Ax = \lambda \|x\|_2^2$.
   $\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x} = A\overline{x} \Rightarrow x^T A\overline{x} = \overline{\lambda} x^T \overline{x} = \overline{\lambda}\|x\|_2^2$.
   $\overline{x}^T Ax - x^T A\overline{x} = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|_2^2$ 問 1 により、$\overline{x}^T Ax - x^T A\overline{x} = 0$ があり、$(\lambda - \overline{\lambda})\|x\|_2^2 = 0$。$x$ は固有ベクトルで、$x \neq 0$ つまり、$\|x\|_2^2 \neq 0$。ゆえに $\lambda = \overline{\lambda}$.

Exercise 5

1. Easy.
2. Easy
3. Example: $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

Exercise 6　直交行列.

1. $Q = (q_{ij})_{ij}$ とする。$[Q^TQ]_{ab} = \sum_{j=1}^n q_{i,a}q_{i,b}$ だから、対角成分 $[Q^TQ]_{aa} = \sum_{i=1}^n q_{i,a}^2 = \|(q_{1,a}, q_{2,a}, \ldots, q_{n,a})^T\|_2^2$。定義により、$Q$ の行のノルムは 1 で、$[Q^TQ]_{aa} = 1$ にしたがう。

   また仮定により Q の相異なる行 Q_a と Q_b は直交だから $a \neq b$ のとき、

   $$(q_{1,a}, q_{2,a}, \ldots, q_{n,a})(q_{1,b}, q_{2,b}, \ldots, q_{n,b})^T = 0.$$

   従って $[Q^TQ]_{ab} = 0$。このことと上のことから、$Q^TQ = \mathrm{Id}$.

2. $x^Tx = \|x\|_2^2 = x^T\mathrm{Id}x = x^TQ^TQx = \|Qx\|_2^2$.　　　$\|\|Q\|\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Q.x\|_2}{\|x\|_2} = 1$

Exercise 7　スペクトラル定理（対称行列版)

1. $x_j^TAx_i = \lambda_i x_j^Tx_i$。同値に $x_i^TAx_j = \lambda_j x_j^Tx_i$.

   一方、$[x_j^TAx_i]^T = x_i^TAx_j$ だから、$(\lambda_i - \lambda_j)x_j^Tx_j = 0$. しかし、$\lambda_i \neq \lambda_j$、つまり $x_j^Tx_i = 0$.

2. 重複固有値がなければ、固有多項式が相異なる n 個の実数根 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つ。ということは、$\dim\ker(\lambda_i\mathrm{Id}-A) = 1$ と $\mathbb{R}^n = \oplus_{i=1}^n \ker(\lambda_i\mathrm{Id}-A)$. $x_i \in \ker(\lambda_i\mathrm{Id}-A)$, $x_i \neq 0$ をとると $(x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となる。問 1 により、その基底は直交である。

3. $n = 1$ の場合、定理は明らかである。(空である）

4. $y \in \langle x\rangle^\perp$. $y^TAx = y^T\lambda x = \lambda y^Tx = 0$.

5. 基底変換の行列の定義により、$P = \left[\ x \mid y_2 \mid \cdots \mid y_n\ \right]$.

   ただ、ベクトル $x, y_2, \ldots, y_n$ は互いに直交で、さらに必要に応じてこのベクトルを正規化する、P は直交行列だと想定できる。

6. $B' = P^{-1}AP$ を示すために、標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して、$B'e_i = P^{-1}APe_i$ を示せば十分。

   $APe_1 = Ax = \lambda x = \lambda Pe_1$。一方、$B'e_1 = \lambda e_1$.

   $i \geq 2$、$APe_i = Ay_i$. 問 4 により、$Ay_i \in \langle x\rangle^T\langle y_2, \ldots, y_n\rangle$ なので、$Ay_i = \sum_{j=2}^n \beta_{j,i}y_j = P\begin{pmatrix}0\\\beta_{2,i}\\\vdots\\\beta_{n,i}\end{pmatrix}$.

$B = (\beta_{i+1,j+1})_{\substack{1\leq i\leq n-1\\1\leq j\leq n-1}}$ とすると、$i \geq 2$ のとき、$B'e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{2,i} \\ \vdots \\ \beta_{n,i} \end{pmatrix}$。

従って $\forall i = 1, \ldots, n, \quad P^{-1}APe_i = B'e_i,$ つまり $B' = P^{-1}AP.$

$B'^T = [P^{-1}AP]^T = [P^TAP]^T = P^TAP = B'$。従って、$B'$ は対称である。

7. 対称行列 B に定理を適用すると (帰納仮定)、B の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^{n-1}$ の基底があり、$\tilde{q_2}, \ldots, \tilde{q_n} \in \mathbb{R}^{n-1}$ と書く。その対応する固有値 (重複を含む可能) $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を記す。また $\tilde{q_2}, \ldots, \tilde{q_n}$ は互いに直交である。次に、$\mathbb{R}^n$ のベクトル $q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{q_i} \end{pmatrix}$ を定義する。$(1, 0, \ldots, 0)^T, q_2, \ldots, q_n$ は $\mathbb{R}^n$ の直交基底だと見える。

   $B'q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ B\tilde{q_i} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{q_i} \end{pmatrix} = \lambda_i q_i$

   ゆえに B' の固有値 (重複を含む)$\lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ である。

8. $x_i = Pq_i$ とすると、$Ax_i = \lambda_i x_i$ が成り立つ。そのうえ、$x, x_2, \ldots, x_n$ は固有ベクトルで、互いに直交である。