Chapter 2 連立1次方程式解法:ダイレクト法

Section 1: ガウス消去法
Section 2:Partial pivoting 部分枢軸選び
Section 3: LU factorization 分解

- Direct Method for Solving Linear Systems

  Direct Methods ≠ Iterative Methods

  ダイレクト法≠反復法

Setting 設定

- System of *n* linear equations in *n* variables $x_1,\dots,x_n$
  未知数$x_1,\dots,x_n$連立一次方程式$E_1,\dots,E_n$:

$$
\begin{aligned}
E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
E_n: &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

- 係数$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Real coefficients.
- Matrix Formulation:行列で： $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
  $A = \left(a_{ij}\right)_{ij}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

Introduction

- The representative of direct methods is the Elimination method
  ダイレクト法の代表的な例として、消去法である。

- In practice, approximate numbers are used so round-off errors appear.
  具体的に、近似値を利用することで、丸め誤差が表れる。

- Goal: Analyze the round-off errors and keep them under control
  主な目的：この丸め誤差を解析して抑えることである。

言葉

- Augmented matrix: 拡大行列

$$[A,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

- Upper Triangular form (上三角形、上三角行列)

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

Z 基の行列
[A,b]の係数a_{ij}と
違う

- Aim: Reduce the augmented matrix into triangular form
目的：拡大行列を三角形に変換すること

言葉： Backward substitution 後進代入

- From an upper triangular matrix, the process of solving is called backward substitution:
  上三角行列から方程式を解く過程は後進代入という。

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

- $x_n = \dfrac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$
- $x_{n-1} = \dfrac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}$ …
- $x_i = \dfrac{a_{i,n+1} - a_{i,n}\, x_n - a_{i,n-1}\, x_{n-1} - \cdots a_{i,i+1}\, x_{i+1}}{a_{ii}} = \dfrac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$
- **Big Assumption**: all $a_{ii} \neq 0$

ガウス消去法 Gaussian Elimination with backward substitution.

- There are n steps.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{\tilde{A}^{(2)}, \tilde{A}^{(3)}, \dots, \tilde{A}^{(n-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

1st Step: $\tilde{A}^{(1)} = [A|\boldsymbol{b}]$

nth Step (last): $\tilde{A}^{(n)}$

Backward substitution
後進代入

- Intermediate step: (example the kth step)
中間ステップ（例えば：第kステップ)

kth Step : $\tilde{A}^{(k)} =$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & a_{k-1,n+1}^{(k-1)} \\ \vdots & & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & a_{k,n+1}^{(k)} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & a_{n,n+1}^{(k)} \end{array}\right]$$

$\tilde{A}^{(k)}$ has entries $a_{ij}^{(k)}$

ガウス消去法のステップ

- k-th step: 第kステップ
  To compute the matrix $\tilde{A}^{(k)}$ from the matrix $\tilde{A}^{(k-1)}$
  行列$\tilde{A}^{(k-1)}$から行列$\tilde{A}^{(k)}$を求めること。

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} & \text{when } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ and } j = 1, 2, \ldots, n+1 \\ 0 & \text{when } i = k, k+1, \ldots, n \text{ and } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)} & \text{when } i = k, k+1, \ldots, n \text{ and } j = k, k+1, \ldots, n \end{cases}$$

- メモ：求めている行列$\tilde{A}^{(k)}$の成分は$a_{ij}^{(k)}$、行列$\tilde{A}^{(k-1)}$の成分は$a_{ij}^{(k-1)}$.
- Only the last k lines may change 最後のk行だけを変わる。
- Last k entries of the $k-1$-th column become 0
  第k-1列の最後のk成分は0となる。

Case of failure 失敗の場合

- The procedure will fail if one of the diagonal element the "pivot") $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n)}$ is zero because the step
  $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n)}$何れの０だと、この過程は失敗する。なぜならば、以下のステップを

$$a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)}$$

cannot be performed (when one $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$ is zero) or the backward substitution fails (when $a_{nn}^{(n)} = 0$).
施すことができない($a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$いすれの０のとき)あるいは、後進代入を行えない($a_{nn}^{(n)}$ =0のとき）。

Example

- Write the matrices $\tilde{A}^{(1)}$, $\tilde{A}^{(2)}$, $\tilde{A}^{(3)}$, $\tilde{A}^{(4)}$ of the 4 steps of the Gaussian elimination. ガウス消去法の四つステップを書け。
- Then solve the system by backward-substitution. そのあと、後進代入を用いて連立方程式を解け.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
E_1: & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \\
E_2: & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
E_3: & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\
E_4: & -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4
\end{array}
$$

Section 2: pivoting 枢軸選択の理由

- ガウス消去法での第kステップにおいて、もしも $a_{kk}^{(k)} = 0$（pivot=ピボット=という　or　枢軸という）が成り立ったら、計算法を進むことができない。 If during the k-th step of the elimination a pivot $a_{kk}^{(k)} = 0$ then we cannot pursue the computation.
- また枢軸は零でないときも、丸め誤差を抑えるため。Or, even if the pivot is not zero, in order to limit the round-off error.
- 後進代入のときに、$x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$、$a_{kk}^{(k)}$が小さければ、分母の誤差が大きく増大する。Duringg the backward substitution, if a denominator is small then round-off will increase dramatically.

Example of round-off errors　丸め誤差の例

精度は４桁で。4-digit precision.

- Example: E_1: $0.003\,x_1 + 59.14\,x_2 = 59.17$
  E_2: $5.291\,x_1 - 6.13\,x_2 = 46.78$
  - 正確な解：$x_1 = 10$ and $x_2 = 1$
  - でも。。。消去法を枢軸選択なしで使ったら。。
    (on the blackboard, 黒板で)

Partial Pivoting 部分枢軸選び

- 各ステップにおいて、枢軸$a_{kk}^{(k)}$の代わりに、同じ列の下に、
$$\left|a_{pk}^{(k)}\right| = \max_{k \le i \le n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$$
を満たす$p \ge k$を定めて、第p行E_pと第k行E_kを交換する。
- 枢軸$a_{pk}^{(k)}$で第kステップを施す。
- Example: E_1: $0.003\, x_1 + 59.14\, x_2 = 59.17$
  E_2: $5.291\, x_1 - 6.13\, x_2 = 46.78$
  (on the blackboard)

Algorithm 1/2 (partial pivoting)

- INPUT: 拡大行列 $\tilde{A} = [a_{ij}] \quad 1 \le j \le n+1, \quad 1 \le i \le n.$
- OUTPUT:解$x_1, \ldots, x_n$ or 「唯一な解でない」

➢ Step 1: $row(i) = i$ (初期化 initialize row pointer)

➢ Step 2: For $i = 1, \ldots, n-1$ do Steps 3-6 *(消去法)*

  ➢ Step 3: $\left|a_{row(p),i}\right| = \max_{i \le j \le n} \left|a_{row(j),i}\right|$
  を満たす $i \le p \le n$ を定める。

  ➢ Step 4: If $a_{row(p),i} = 0$ then OUTPUT "解がない"; END

  ➢ Step 5: If $row(i) \ne row(p)$ then

    ➢ $tmp = row(i)$; $row(i) = row(p)$; $row(p) = tmp$;
    行の交換を擬態する row 値のswitch.

Algorithm 2/2 (partial pivoting)

- Step 6: For $j = i + 1, \dots, n$ do Steps 7-8
  - Step 7: Let $m_{row(j),i} = \dfrac{a_{row(j),i}}{a_{row(i),i}}$
  - Step 8: 行の交換：$E_{row(j)} \leftarrow E_{row(j)} - m_{row(j),i} E_{row(i)}$
- Step 9: If $a_{row(n),n} = 0$ then OUTPUT 唯一な解がない。
- Step 10: $x_n = a_{row(n),n+1} / a_{row(n),n}$
  (Backward substitution　後進代入を始める)
- Step 11: For $i = n-1, n-2, \dots\dots, 2,1$

$$x_i = \frac{a_{row(i),n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{row(i),j} \cdot x_j}{a_{row(i),i}}$$

- Step 12: OUTPUT $x_1, x_2, \dots, x_n$

Is partial pivoting always enough ?
部分枢軸は常に十分？

- ほとんどの連立１次方程式の場合、部分枢軸を使ったガウス消去法は円滑に進むが。。
- Example: E_1: $30.0x_1 + 591400x_2 = 591700$
  E_2: $5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$
  (page 3-4の例と同じだが、E_1は１０倍にした。on the blackboard ４桁の精度。4-digits precision)

Scaled Partial Pivoting 調整部分枢軸選び I

- 列の成分$(a_{ij})_{j=1,\ldots,n}$をほぼ同じ大きさにそろえる調整である。
  最初に　$s_i = max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$　とする

- 問：$s_i = 0$ の場合、解の個数はどうなるか？

- $\forall i,\ s_i \neq 0$を想定しよう。

- 最初の交換の決定：$\dfrac{|a_{p1}|}{s_p} = \max\limits_{1 \le k \le n} \dfrac{|a_{k1}|}{s_k}$
  を満たす 最低　$p \geq 1$　を定める。

Scaled Partial Pivoting 調整部分枢軸選び II

- 最初のステップの同様に、変数 x_i を消去する際に、(第iステップ) $p \geq i$ を以下のように定めて、

$$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{i \leq k \leq n} \frac{|a_{ki}|}{s_k}$$

- 行の交換　$(E_i) \leftrightarrow (E_p)$ を行う。
- そのあと、普通に消去を施す。

- 注意:　調整係数 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ を最初に１回だけ計算する。The scaling coefficients $s_1, \ldots, s_n$ are computed once at the beginning.
  - 行に依存するものなので、行交換と同時に交換するひつようである。They depend on the lines so their index should change with the column switching.
  - Example: *(on the blackboard).*

Algorithm scaling partial pivoting

Same as in page 4-5 (partial pivotingと大分同じ)

☞Just change Steps 1-3 to: ステップ1-3だけ変わる。

- Step 1: For $i = 1, \ldots, n$ set $s_i = max_{1 \le j \le n} \left| a_{ij} \right|$
  - If $s_i = 0$ then OUTPUT 【唯一な解でない】
  - Else $row(i) = i$ (初期化 initialize row pointer)
- Step 2: For $i = 1, \ldots, n-1$ do Steps 3-6
  - Step 3: $\frac{\left|a_{row(p),i}\right|}{s_{row(p)}} = \max_{i \le j \le n} \frac{\left|a_{row(j),i}\right|}{s_{row(j)}}$

を満たす $i \le p \le n$ を定める。

Section 3: Matrix factorization 行列分解

- Aを非特異な正方行列とする。
  Let A be a square nonsingular matrix.
- L、Uをそれぞれ 下三角行列と上三角行列と指す。In this section L and U will respectively denote a lower and upper triangular matrix.

- LU分解とは、$A = LU$を満たす特定の下三角行列Lと、上三角行列Uを見つけること。An LU factorization of A is the problem of find matrices L and U.

- 常にLU分解が存在しないが、方程式系$Ax = b$にガウス消去法を適用するときに、行の交換が行わなくても結果が出た場合は、に存在する。An LU factorization does not always exist, but it does when Gauss elimination did not require rows interchanges

Why LU factorization?

- Suppose that $A = LU$ and that we want to solve $Ax = b$.
  $A = LU$を想定し、$Ax = b$を解きたい。
- Then $LUx = b$ gives $Ly = b$ with $Ux = y$.
  - First solve $Ly = b$ by forward-substitution
    最初に前進代入のように　$Ly = b$を解いてyを得る。
  - Second solve $Ux = y$ also by backward substitution
    後進代入で$Ux = y$を解くことでxを得る。

- 後進･前進代入の計算量は$O(n^2)$ なので、ガウス消去法の計算量$O(n^3)$に比べてずいぶん効率である。Since backward substitution only requires $O(n^2)$ operations, and elimination $O(n^3)$ this is much more efficient.
- ただ、LU分解を計算するのに$O(n^3)$演算がかかる！
- いくつかのベクトルbに対する$Ax = b$連立１次方程式を解くときに利益がある。
  When several systems $Ax = b$ for different b are necessary to solve, it is advantageous.

How to obtain the LU factorization? I

- 一応、列の交換を使わずAにガウス消去法を実行できるという仮定をしよう。
For now, assume that Gauss elimination does not require row interchanging on A.
- 前の章によると、各nステップに、得られる行列を$A^{(k)}$と書き、その成分$a_{ij}^{(k)}$と書いた。$(k = 1, \ldots, n)$
In the last section, we denoted the matrix obtained at step k by $A^{(k)}$ and its entries by $a_{ij}^{(k)}$. $(k = 1, \ldots, n)$
- 上記の仮定によると、枢軸$a_{kk}^{(k)} \neq 0$に従う
The above assumption implies that the pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

How to obtain the LU factorization? II

- Question: Find a matrix $M^{(1)}$ such that:
  問：以下の相等を満たす行列$M^{(1)}$を求めよ。
  $$M^{(1)} \cdot A = A^{(2)}$$

- Remember that $A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{1,n-1}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$

- Answer: *(try with n=2 first!)*

Construction of the U matrix

- $M^{(1)} \cdot Ax = A^{(2)}x = M^{(1)}b = b^{(2)}$
- $M^{(k-1)} \cdot A^{(k-1)}x = A^{(k)}b = M^{(k-1)}b^{(k-1)} = b^{(k)}$
- $M^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & -m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad m_{i,k} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

Upper triangular
上三角行列

- $U = M^{(n-1)}M^{(n-2)}M^{(n-3)} \dots M^{(2)}A = A^{(n)}$

Construction of the L matrix

- We want to reverse the elimination of the variable x_k:
  変数x_kの消去を逆にする：$A^{(k+1)} \to A^{(k)}$
  $M^{(k)}A^{(k)} = A^{(k+1)}$　　だから　$\boxed{L^{(k)} = \left[M^{(k)}\right]^{-1}}$

- Compute $L^{(k)} =$
  (Try with: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_k & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & m_{k+1,k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \cdots & 0 & m_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

- **定義**：$L = L^{(1)} \ldots L^{(n-2)} L^{(n-1)}$

Construction of the L matrix

$$L^{(1)} \dots L^{(n-2)} L^{(n-1)} M^{(n-1)} M^{(n-2)} \dots M^{(1)} A = LA^{(n)} = LU$$

It is easy to prove that　以下を証明するのは難しくないである。

$$L = L^{(1)} \dots L^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Where $m_{ij} = \dfrac{a_{ji}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$

LU factorization まとめ

Theorem: If the Gaussian elimination applied to the system $Ax = b$ requires no row interchanges then the matrix A can be factored into $A = LU$ where $m_{ij} = a_{ji}^{(i)}/a_{ii}^{(i)}$
もしガウス消去法は連立１次方程式$Ax = b$に適用するときに行の交換がないなら、$A = LU$分解があり、ただし；

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}^{(n)} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Example (same as page ??)

- Write the LU factorization of the following matrix A
  行列AのLU分解を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Use the system to solve $Ax = c$ with $c = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -1 \end{bmatrix}$

With Row interchange 行の交換で

- If a pivot $a_{ii}^{(i)} = 0$ or to control round-off we make some row interchanges in Gauss elimination, then we need to record these interchanges in a so-called "permutation matrix" P and the factorization is
$$PA = LU.$$
もし枢軸$a_{ii}^{(i)} = 0$ または　丸め誤差を抑えるために行の交換を行うなら、その交換を置換行列というものを用いて記録し、$PA = LU$分解を得られる。

- 最初に置換行列の復習をしましょう。
Let's start by a review of permutation matrix.

Permutation matrix 置換行列

- A permutation ϕ of the set $\{1,2,\dots,n\}$ can be written by $a_1,a_2,\dots,a_n$ with pairwise distinct numbers $a_i \in \{1,..,n\}$ as follows:
  集合$\{1,\dots,n\}$の置換ϕを$a_1,\dots,a_n$で記す可能である：
  $$\phi(i) = a_i$$

- **Definition**: The matrix of the permutation ϕ_i is he unique matrix P_ϕ such that $P_\phi \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

- Question: write the matrix of the permutation 3,1,2.

- **Theorem**: $P_\phi^{-1} = P_\phi^T$

  Proof: Show that if $P_\phi = (p_{ij})$ then $p_{ij} = 1$ iff $j = \phi(i)$.

Multiplication by a permutation matrix
置換行列に積をする

- If P is the matrix of the permutation ϕ , and row_i and $column_i$ denote the i-th row and i–th column of a matrix, then
  もし Pは置換 ϕの行列とし、row_i と $column_i$ をそれぞれ行列の第i目行、第i目列とすれば、

$$row_i(A) = row_{\phi(i)}(PA)$$
$$column_i(A) = column_{\phi(i)}(AP)$$

- If we know the row interchanges of A performed during Gaussian elimination, and if we record them in the permutation matrix P, then no row interchange is necessary to the matrix PA
  予め、行の交換を知る場合は、それを行列Pに記録すれば、行列PAでは行の交換が不要である。
  ☞ Just use LU factorization on PA
  行列PAをただのLU分解を使う。

Example $A = (P^T)LU$

- Find a factorization of the form $A = (P^T L)U$ for :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$