# MMA Advanced Lecture I  <u>Handout 6</u>

**Teaching Assistant： Shun'ichi Yokoyama（Doctor's 1st）**
Global COE Program TRA(Talented Research Assistant)

This handout is available from my webpage:

**http://yokoemon.web.fc2.com/education.html**

# Now planning to move.

## Announcement

- **HOMEWORK SUBMISSION: P.T.IV** Due Date is July 15th. Please note.
- Previous Practice Test (III)'s due date is today. Give it to us if you've done.
- All slides, handouts and additional materials are uploaded, so please download if you need. **Also noted the list of all downloadable files, see Page 3.**
  - TA's handout 5 (not given directly) is already downloadable. It contains some examples of computation of Gröbner basis and topics (in Japanese).

## Brief notes on Affine Varieties (for Hilbert's Nullstellensatz)

英語による困難克服のため, 講義で扱った「ネーター性」および「アファイン代数多様体論」にまつわる基礎事項（Hilbert の零点定理を理解するための最小必要事項）を概説しておきます. 復習の助けにして下さい. なお, ここで使用している記号などは講義中に使用されたものと異なる可能性がありますので, あくまでも講義の板書ノートを元に勉強してください.

### 0.1 ネーター環

**定義** 次の同値な 3 条件を満たす環 $R$ を**ネーター環**（Noetherian ring）という.

- **昇鎖条件：**$R$ の任意のイデアルの増加列 $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ に対し, ある自然数 $N$ が存在して $I_N = I_{N+1} = \cdots$ が成り立つ.
- **極大条件：**$R$ のイデアルを要素とする空でない集合は, 包含関係に関して極大元を持つ.
- **有限条件：**$R$ の任意のイデアルは有限生成である.

理解しやすいのは 1 番目と 3 番目であろうから, この 2 つを定義と思って理解しておこう. 例えば有限条件から, PID（単項イデアル整域）はネーター環である.

**定理（Hilbert の基底定理）** $R$ がネーター環ならば, $R[x]$ もネーター環である.

例えば体 $k$ 上の $n$ 変数多項式環 $k[x_1, ..., x_n]$ はネーター環である.

## 0.2　アファイン代数多様体

以降, 体 $k$ を固定し, $n$ 変数多項式環 $k[x_1,...,x_n]$ を $R$ で表す.

**定義**　いくつかの多項式 $f_j(x_1,...,x_n) \in R$（$j=1,...,m$）に対し, $k^n$ 内の共通零点集合（連立方程式 $f_1=\cdots=f_m=0$ の解集合）を**（アファイン）代数的集合**（affine algebraic set）という. $k^n$ 自身を代数的集合と見たとき（$k$ 上の）$n$ 次元**アファイン空間**（affine space）といい, $\mathbb{A}^n_k$ 或いは単に $\mathbb{A}^n$ で表す. 特に $\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^2$ をアファイン直線, アファイン平面という.

$R$ の部分集合 $S$ に対し, $V(S)$ で $S$ に属するすべての多項式の共通零点集合を表す.

**命題**　$S$,$T$ を $R$ の部分集合とするとき, 以下が成り立つ.

- $S \subset T \Longleftrightarrow V(S) \supset V(T)$
- $I$ を $S$ のすべての元で生成されるイデアルとすると, $V(I)=V(S)$.

前節で述べた通り $R$ はネーター環であるから, イデアル $I$ は有限個の元 $f_1,...,f_m$ で生成され, それらの共通零点集合 $V(\{f_1,...,f_m\})$ は $V(I)$ と一致する. よって, 代数的集合とはあるイデアルに対する $V(I)$ のことと同じである.

なお, アファイン空間には $V(I)$ を閉集合系として位相が入る（ザリスキー（Zariski）位相）.

**定義**　代数的集合 $V \subset \mathbb{A}^n$ に対し, 関数 $\varphi\colon\ V \to k$ が $V$ 上の**多項式関数**（polynomial function）であるとは, ある多項式 $f(x_1,...,x_n) \in R$ が存在して, $V$ 上の各点で値が一致する（$\varphi = f|_V$）ことをいう.

$V$ 上で 0 となる $R$ の元全体を $I(V)$ と書く. $I(V)$ はイデアルであり, 2 つの多項式 $f,g \in R$ が $V$ 上の多項式関数として同じであるのは $f-g \in I(V)$ と同値である. $V$ 上の多項式関数の全体 $A(V)=R/I(V)$ を $V$ の**（アファイン）座標環**（affine coordinate ring）という. 以下, 多項式関数は $R$ での代表元で表すことにする.

**命題**　代数的集合 $V$ に対し $V(I(V))=V$.

続いて $X$ を空でない位相空間とする. $X$ が**可約**（reducible）であるとは, 2 つの真の閉集合の和集合で書けることをいう. 可約でないとき**既約**（irreducible）であるという. 即ち $X$ が既約であるとは, $X$ の閉部分集合 $X_1, X_2$ に対し $X=X_1 \cup X_2$ ならば $X=X_1$ または $X=X_2$ が成り立つ.

**命題**　代数的集合 $V$ に対し, $V$ が既約であることと, $A(V)$ が整域（integral domain）であることは同値.

**定義**　既約な代数的集合 $V$ を**アファイン代数多様体**（affine algebraic variety）という.

任意の代数的集合は, 有限個の既約な代数的集合の和集合で表せる.

## 0.3 Hilbert の零点定理

例えば $\mathbb{R}$ 上で $x^2+1=0$ の解集合を考えると, これは空集合となる. このように, 真のイデアル $I$ の情報が $V(I)$ に伝わらず, $V(I)$ から $I$ を復元出来ないということが起きる場合がある. しかし, 代数的閉体（例えば $\mathbb{C}$）上なら, 次のように解集合と方程式系との対応がきれいにあらわれる. これが **Hilbert の零点定理**（Hilbert's Nullstellensatz）である. 記号の準備を一つだけして, 定理を述べよう.

**定義**　環 $R$ のイデアル $I$ に対し, 何乗かしたら $I$ に入るような元の全体

$$\sqrt{I} := \left\{ r \in R \mid \ {}^{\exists}m > 0,\ r^m \in I \right\}$$

はイデアルを成し, $I$ の**根基**（radical）と呼ばれる. 特にべき零元の全体 $\sqrt{(0)}$ を $R$ の**べき零根基**（nilradical）という.

**定理（Hilbert's Nullstellensatz）**　$k$ を代数的閉体とするとき, $k$ 上の多項式環 $R = k[x_1, ..., x_n]$ に対して次が成り立つ.

- $R$ の極大イデアルは $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$（$a_1, ..., a_n \in k$）の形で書ける.
- 真のイデアル $I$ に対して $V(I) \neq \phi$
- $I(V(I)) = \sqrt{I}$, 即ち $V(I)$ の全ての点で 0 となる多項式は, 何乗かすると $I$ に入る.

∗∗∗

## List of all downloadable files

The following list is correct as of July 8th. It will be modified.

- Apr. 15, 2010 / 1. Introduction & Motivation
  - Lecture Sildes I
  - TA's Handout 1: Intro. and Office Hours
  - Demo: Geometric Gaussian Elimination
- Apr. 22, 2010 / 2. Univariate Polynomial's GCD: Bezout Identity
  - Lecture Sildes II
  - TA's Handout 2: Vocabulary 1
  - Mathematica: Polynomial Extended GCD
- May. 6, 2010 / 3. About Univariate Polynomial and intro. to Multivariate
  - Lecture Sildes III
  - TA's Handout 3: Vocabulary 2
- May. 13, 2010 / 4. About Multivariate Polynomial and Division Algorithm
  - None
- May. 20, 2010 / 5. About unicity and Introduction to Groebner basis I

- Lecture Sildes IV
- Practice Test I: Monomial Order and Division Algorithm
- TA's Handout 4: Easy Exercises

- May. 27, 2010 / 6. Introduction to Groebner basis II
  - TA's Handout Extra: Remarks for P.T. I in Japanese
  - Practice Test II: Division equality and monomial ideals
- Jun. 3, 2010 / 7. Buchberger's algorithm
  - Lecture Sildes V
- Jun. 10, 2010 / 8. Syzygies and Overview of Resultants
  - None
- Jun. 17, 2010 / 9. Resultants I
  - Lecture Sildes VI
  - Practice Test III: Around the Buchberger algorithm — Here is the CORRECTED version, especially the following.
    - CORRECTION 1: Ex.5-Q2. "Next, select the pair (1,3)" → NO! It is (2,3).
    - CORRECTION 2: Ex.5-Q3. "Next the pair (2,3)" → NO! It is (1,3).
    - CORRECTION 3: It is written "There are 2 pairs above [1,l] and [3,l] such that Test 2 works" but it doesn't work. However, it is not so serious because actually we have S(f1,f3) → 0 so the other questions are correct.
    - CORRECTION 4: Ex.6-Q3, It is not correct, but there is a homogeneous syzygy of multi-degree $X^{\gamma}$, so it is not "too incorrect".
- Jun. 24, 2010 / 10. Resultants II + Elimination and Nullstellensatz I
  - Resultant and Applications
  - TA's Handout 5: Examples and Remarks
  - Mathematica File: Syl-2.nb
    - Sylvester matrix, intersection of 2 plane curves, Eulidean algorithm for the resultant
  - Mathematica File: VanishOnAlgNbr.nb
    - Contains 3 examples of computation of a vanishing polynomial of some algebraic numbers
- Jul. 1, 2010 / 11. Elimination and Nullstellensatz II
  - Practice Test IV: Resultant
- Jul. 8, 2010 / 12. Elimination and Nullstellensatz III

Good Luck. Do Your Best!!