

MMA Advanced Lecture I Extra: Remarks for P.T. I in Japanese

Teaching Assistant : Shun'ichi Yokoyama (Doctor's 1st)
Global COE Program TRA(Talented Research Assistant)

This handout is available from my webpage:

<http://yokoemon.web.fc2.com/education.html>

Now planning to move.

Practice Test I 補足解説

- 皆さんの理解の助けになるよう、今回だけ日本語での補足を付けておきます。Division algorithm は Gröbner 基底を理解する上で非常に重要な概念ですので、しっかりと復習をお願い致します。前回配った手書きの解答例を手元にご用意の上、ご覧ください。

= = =

1. lex 順序および revlex 順序, grlex 順序および grevlex 順序の定義をしっかりと確認しておきましょう。その上で、単項式順序が変われば multidegree の順序も変わることを忘れないように。例えば

$$f_2 = y^2 + yz + x^2$$

を $grlex(z, y, x)$ で考えたときの multidegree を求めてみると, multidegree はすべて 2 なので, その中で z の degree が最大である yz を選び, $z \succ y \succ x$ の順番で各 degree を並べて $(1, 1, 0)$ ($zy = z^1y^1x^0$) となります。これは文字式になっても変わりません。

2. multidegree のグラフィック表示の問題です。コツさえ分かればそれほど難しくはないでしょう。考える領域は \mathbb{N}^2 なので, $x \geq 0, y \geq 0$ 以外の部分は考えていません (解答例の斜線領域がはみ出しているように見えますが, 気にしないでください)。

一点注意ですが, \prec と \leq の違いに気をつけましょう。これまで大小比較の際「同じ単項式」を考えたことがなかったので, 分からなかったかもしれませんね (こちらの説明不足でもありました)。例えば $(\alpha, \beta) \leq (2, 3)$ の場合は $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ も許しますが, $(\alpha, \beta) \prec (2, 3)$ の場合は $(\alpha, \beta) \neq (2, 3)$ となります。そのため, 斜線領域からは点 $(2, 3)$ を除外する必要があります。普段使ってきた \prec は “strict inequality” であることを覚えておきましょう。これまで皆さんが使ってきた $<$ と \leq の違いと同じですね。

3. 前半の必要十分の証明 (2 変数の場合) は解答の通りです。考えられる全ての場合を考えて, 必要条件と十分条件をチェックすれば OK です。

一方, 後半の解答を書くのを忘れていました。3 変数の場合はどうかという問いですが, 答えは成り立たないが正解。例えば

$$x^2y^3z \prec_{grlex} x^3yz^2 \iff x^2y^3z \succ_{grevlex} x^3yz^2$$

が反例で (order の向きが変わっていることに注意), 真ん中に y というダミーをはさめることが原因です。皆さんの解答の中には, 3 変数でも必要十分条件が成り立つ条件をきちんと求めてくれた人もいらっしゃいました。素晴らしいですね

4. これは理屈だけ見ると非常にカンタン. 要は

$$\alpha_l - \beta_l > 0 \quad \text{where } l = \max_{1 \leq i \leq n} (i \mid \alpha_i \neq \beta_i)$$

が, max を inf (min でも可) に書き換えた

$$\beta_l - \alpha_l < 0 \quad \text{where } l = \inf_{1 \leq i \leq n} (i \mid \alpha_{n-i+1} \neq \beta_{n-i+1})$$

と同値であることが見て取れるかどうかポイントです.

5. これは手書きの筆算を見て復習をお願いします. 2つのケースで余りが異なる場合と同じになる場合が見て取れますが, この違いは何なのでしょう? (Practice Test II にてもう少し突っ込んで考察します)

今回は, 英語で書かれた答案を Dahan 先生が, 日本語で書かれた答案を横山が採点しました. しかしながら, この講義は英語での数学講義の理解が目的ですので, 文法ミスなどを恐れることなく, 積極的に英語で答案を書いてみましょう. 数学的内容は成績評価の対象になりますが, 英語力は対象になりません. どんどん英語での表現にチャレンジしてみてくださいね.

それでは, 次回もがんばってください!!